Лекция №5. Симметрические функции.

...ярное число p: p не делит $B_1, B_2, \dots, B_{p-3}$ числитель. Первое такое число 37.

...мула Эйлера-Маклорена
1732 1743

$b = a + Nh$], f на $[a, b]$

$$\sum_{i=1}^{N-1} f(a+ih) = h^{-1}\int_a^b f(x)\,dx - \frac{1}{2}[f(b) - f(a)] + \frac{1}{12} h[f'(b) - f'(a)] -$$

$$\frac{1}{30\cdot 24} h^3 [f'''(b) - f'''(a)] + \dots + h^{2k-1}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\left[f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)\right] +$$

$$R_{2k+1} < \left| h^{2k+1}\frac{B_{2k+2}}{(2k+2)!}\left[f^{(2k+1)}(b) - f^{(2k+1)}(a)\right]\right|$$

все чётные производные f на $[a, b]$ одного знака

...мер: $\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$

$= \frac{1}{x^2}$; $a = 1$, $b = 10^6 =$ „∞", $h = 1$, $N = \infty$

$= -\frac{2}{x^3}$; $f'' = \frac{6}{6x^4}$, ... $f^{(n)} = \frac{(-1)^n (n+1)!}{x^{n+2}}$

$^{(n)}(b) = 0$. $\int_1^\infty f = 1$

$$\sum \frac{1}{i^2} = 1 + \frac{1}{2}\cdot 10^{-1} + \frac{1}{6}\cdot 10^{-1} - \frac{1}{30}\cdot 10^{-3} + \frac{1}{42}\cdot 10^{-5} - \frac{1}{30}\cdot 10^{-7} + \frac{5}{66}\cdot 10^{-9} - \frac{691}{2730}\cdot 10^{-11} + \frac{7}{6}\cdot 10^{-13} - \frac{3617}{510}\cdot 10^{-15} + \frac{43867}{798}\cdot 10^{-17} - \frac{174611}{330}\cdot 10^{-19}\ 10^{-21}$$

$$\| \quad 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} + \frac{1}{64} + \frac{1}{81} + \sum_{i=10}^{\infty}\frac{1}{i^2}$$, т.е. $a = 10$ — оценка погрешности $0{,}5 \cdot 10^{-12}$

...д Э-М всё равно расходится, но на 10 шаге даёт точность 10^{-18} с точностью до 10^{-18} 18 знаков.

...яде $\sum \frac{1}{i^2}$ для такой точности на взять 1000 000 000 членов

$\Downarrow$

$\pi^2 = 9{,}869604\ 401\ 089\ 358\ 621$

Симметрические функции.

Симметрические многочлены: не меняются при перестановки x_i, x_j

$\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$

Пр:

$x_1 + x_2 + \dots + x_n$

или $x_1 x_2 x_3 \dots x_n$

или $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^n$

или $x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots x_i x_j$

Элементарные симметрические многочлены:

$$x_1 + \dots + x_n = e_1 = \sigma_1 \quad (e \text{ - elementary})$$

$$\sum_{i \neq j} x_i x_j = e_2 = \sigma_2$$

$$\sum_{\substack{i \neq j \neq k \\ \neq}} x_i x_j x_k = e_3 = \sigma_3$$

$$x_1 \cdots x_n = e_n = \sigma_n$$

$$t^n + a_1 t^{n-1} + a_2 t^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

$$\parallel$$

$(t - x_1)(t - x_2) \dots (t - x_n)$, т.е. x_i - все корни

$$\begin{cases} a_1 = -e_1 \\ a_2 = e_2 \\ \vdots \\ a_i = (-1)^i e_i \\ \vdots \\ a_n = (-1)^n e_n \end{cases}$$

д-во просто раскрыть скобки

— Теорема Виета

Теорема кольцо симметрических многочленов $\mathbb{C}[x_1, \dots x_n]^{S_n}$ $\mathfrak{S}_n$

изоморфно $\cong$

$\mathbb{C}[e_1, e_2, \dots e_n]$

Доказательство теоремы: нужно доказать, что: ($d_i \in \mathbb{N}$)

$\{e_n^{d_n} e_{n-1}^{d_{n-1}} \dots e_1^{d_1}\}$ - образуют базис в кольце симметрических многочленов $\mathbb{C}[x_1, \dots x_n]^{S_n}$

$(\deg(\dots) = nd_n + (n-1)d_{n-1} + \dots + d_1)$

Сначала предъявим другой базис из мономиальных симметрических функций

Зафиксируем разбиения

$\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0 \ \dots)$ с $\leq n$ членов

не больше $n!$ слагаемых

$x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n}$ + все перестановки по одному разу $=: m_\lambda$ (m = monomial)

Лемма: $\{m_\lambda\}$ - образуют базис в $\mathbb{C}[x_1, \dots x_n]^{S_n}$

(Пр: $\lambda = (1, \dots 1)$

$m_\lambda = e_n$

Док-во леммы: 1) Введем на мономах лексикографический порядок

x_1 А $\quad x_2$ Б $\quad x_3$ В

$x_1 > x_2 > x_3 > \dots$

$x_1 x_3 x_1 x_4 x_3 x_1$ - $x_1^3 x_3^2 x_4 > x_2$

$\wedge$

x_1^{10}

2) Возьмем $f(x_1, \dots x_n)$ - симметр. функция

$f(x_1, \dots x_n) = \sum c\, x_1^{d_1} \dots x_n^{d_n} + \dots$ Среди слагаемых мы выберем первое в словарном порядке $c_\lambda x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n}$

Но сначала разложим $f(x_1, \dots x_n)$ на однородные слагаемые. В степени однородности N первый в лексик. порядке моном - это x_1^N, последний x_n^N

Рассмотрим $(f - c_\lambda m_\lambda)$ - имеет только строго следующие мономы

$f - c_\lambda m_\lambda - c_{\lambda'} m_{\lambda'}$

Лемма $\boxtimes$

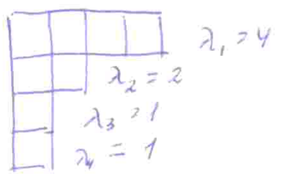
Разбиения $\lambda_1 \ge \dots \ge \lambda_N \ge 0 \dots$

$\lambda_1 \le n \Rightarrow e_\lambda := e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \dots e_{\lambda_N}$ — тот же базис что

$e_n^{d_n} e_{n-1}^{d_{n-1}} \dots e_1^{d_1}$, только иначе занумерованный

Лемма: e_λ имеет первый лекс. моном. x^{λ^*}

Какая максимальная степень x_1? Отв: количество строк



$e_3 e_2 e_1 e_1$

$x_1^4 x_2^2 x_3$ с коэфф. 1

При нём максимальная степень x_2 равна числу строк длины ≥ 2

При нём максимальная степень x_3 равна числу строк длины ≥ 3

...

В общем случае есть понятие двойственного разбиения $\lambda \to \lambda^*$

λ_1^* = числу строк

λ_2^* = числу строк длины ≥ 2

$\lambda_3^* = \dots \ge 3$

Лексик. старший моном $e_\lambda = x_1^{\lambda_1^*} x_2^{\lambda_2^*} x_3^{\lambda_3^*} \dots x_n^{\lambda_n^*}$

Правое условие на $\lambda \iff$ у λ^* $\le n$ членов

Следствие: $e_\lambda = m_{\lambda^*}$ + меньшие в лексик. порядке мономы $c_{\lambda'} m_{\lambda'}$.

Меньшие: $\lambda' < \lambda^*$

$$\lambda^* = (N, 0, \dots 0) > (N-1, 1, 0, \dots 0) > (\underbrace{1, 1, \dots 1}_{N})$$

полный лекс. порядок на разбиениях

$$e_{(1,1,1\dots)^*} = m_{(1,1,\dots 1)}$$
$$\|$$
$$e_N$$

$$e_{(2,1,\dots 1)^*} = m_{(2,1,\dots 1)} + c\, m_{(1,\dots 1)}$$

$$\Downarrow$$

по индукции можно все m выразить через e (начиная с $m_{(1,\dots 1)}$ и конч. $m_{(N,0\dots 0)}$ по лекс. порядку)

Алгоритм: На практике берем

$$f = \sum c_d \, x_1^{d_1} \ldots x_n^{d_n}$$

находим самый крайний $x_1^{d_1} x_2^{d_2} \ldots x_n^{d_n}$, $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$ - разбиение λ

$f - c_d e_{\lambda^*}$ имеет меньший моном и с ним продолжаем.