Лекция №4 Числа Бернулли и формула Эйлера-Маклорена 25.09.

t - ряды, x - многочлены

$\mathbb{C}[[t]]$, $\mathbb{C}[x]$

действует линейными операторами на

$$t := \frac{\partial}{\partial x} = \frac{d}{dx}$$

$$t(f) = f'$$

Формальные ряды действуют на многочленах $\mathbb{C}[x]$, т.к. $P^{(n)}(x) = 0$ при $n \to 0$ для $\forall P(x)$

$$\left(\sum a_n t^n\right)(P) = a_0 P + a_1 P' + a_2 P'' + \dots + a_n P^{(n)} + \dots$$

начиная с места $n = \deg P + 1$ будут одни нули, поэтому результат корректно определен.

Следствие: пространства $\mathbb{C}[x]$ и $\mathbb{C}[[t]]$ двойственны

спаривание

$$\langle f(t), P(x) \rangle := f(P)\Big|_{x=0}.$$

$\dim \mathbb{C}[x] = \aleph$

$\dim \mathbb{C}[[t]] = 2^{\aleph}$ ✓ континуум.

Пример: $f(t) = \exp(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \dots$

$\exp\left(\frac{d}{dx}, P(x)\right) =$

$P = 1$, $\exp\left(\frac{d}{dx}\right)P = 1$

$P = x$, $\exp\left(\frac{d}{dx}\right)P = x + 1$

$P = x^2$, $\exp\left(\frac{d}{dx}\right)P = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$

$P = x^3$, $\exp\left(\frac{d}{dx}\right)P = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+1)^3$

$$\exp\left(\frac{d}{dx}\right)(x^n) = x^n + nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2} + \dots = (x+1)^n$$

Теорема: $\exp\left(\hbar \frac{d}{dx}\right) P(x) = P(x + \hbar)$

постоянная Планка

Оператор сдвига $P(x) \to P(x+\hbar)$ обозначается $T_\hbar$

$\forall$ многочлена $P(x)$

Доказательство:

$$\left(1+h\frac{d}{dx}+\frac{1}{2}h^2\frac{d^2}{dx^2}+\ldots+\frac{1}{n!}h^n\frac{d^n}{dx^n}\right)x^N=$$

$$= x^N + Nhx^{N-1}+\frac{1}{2}N(N-1)h^2x^{N-2}+\ldots+\frac{1}{n!}N(N-1)\ldots(N-n+1)h^n x^{N-n}+\ldots$$

$= \text{бином Ньютона} = (x+h)^N$

Следствие разностный оператор $\Delta = T_1 - 1$ — дискретное дифференцирование

$\Delta P(x) = P(x+1) - P(x)$ равен $\boxed{\exp\left(\frac{d}{dx}\right)-1}$

непрерывное дифференцирование

Введем формальный ряд $B(t) := \frac{t}{\exp(t)-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k}{k!}t^k$ —

— определение чисел Бернулли (Якоб Бернулли XVII век)

Все нечетные $B_{2k+1}=0$ кроме B_1, т.е.

$B(t)$ почти четная функция

$$B(t) - B(-t) = \frac{t}{e^t-1} - \frac{-t}{e^{-t}-1} = \frac{t}{e^t-1} - \frac{e^t\cdot t}{e^t-1} =$$

$$= \frac{t(1-e^t)}{e^t-1} = -t \neq 0$$

$$\Downarrow$$

$$B_1 = -\frac{1}{2},\ B_3 = B_5 = \ldots = 0.$$

Четные B_{2k} находятся рекурсивно из уравнения

$$B(t)\cdot(\exp(t)-1) = t$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} B_k\frac{t^k}{k!}\right)\left(t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\ldots\right) = t$$

$$B_0 = 1,\ B_1 = -\frac{1}{2}$$

$$B_2 = \frac{1}{6},\ B_4 = -\frac{1}{30},\ B_6 = \frac{1}{42},\ B_8 = -\frac{1}{30},\ B_{10} = \frac{5}{66},$$

$$B_{12} = -\frac{691}{2730},\ B_{14} = \frac{7}{6},\ B_{16} = -\frac{3617}{510},\ B_{18} = \frac{43867}{798},$$

$B_{20} = \frac{174611}{330}\ \ldots$ Они растут

Теорема Ферма $x^p + y^p = z^p$ верна для простого p

p не делит числитель B_{2p}

$$\boxed{B\left(\frac{d}{dx}\right)\cdot\Delta = \frac{d}{dx}}$$

$$\left(1-\frac{1}{2}\frac{d}{dx}+\frac{1}{12}\frac{d^2}{dx^2}-\frac{1}{30\cdot 24}\frac{d^4}{dx^4}+\dots\right)\cdot(T-1)=\frac{d}{dx}$$

Применим эти операторы к многочлену $g(x)$ который равен $g(x)=\int P(x)$ - какой-нибудь неопределенный интеграл

$$g(a+1)-g(a)\cdot-\frac{1}{2}\left[P(a+1)-P(a)\right]+\frac{1}{12}\left[P'(a+1)-P'(a)\right]-\frac{1}{720}\left[P'''(a+1)-P'''(a)\right]+\dots$$

$= P(a)$

Изменим масштаб $T_1 \rightsquigarrow T_h$

$$\frac{1}{h}\left(g(a+h)-g(a)\right]-\frac{1}{2}\left[P(a+h)-P(a)\right]+\frac{1}{12}\left[P'(a+h)-P'(a)\right]-$$

$$-\frac{1}{30\cdot 24}h^3\left[P'''(a+h)-P'''(a)\right]+\dots=P(a)$$

от a до $a+h$, потом от $a+h$ до $a+2h$, ...

от $a+(N-1)h$ до $a+Nh=b$, сложив, получим

$$\sum_{i=0}^{N-1}P(a+ih)=h^{-1}\int_a^b P(x)dx-\underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{B_1}{1!}}\left[P(b)-P(a)\right]+$$

$$+\underbrace{\frac{1}{12}}_{\frac{B_2}{2!}}h\left[P'(b)-P'(a)\right]-\underbrace{\frac{1}{30\cdot 24}}_{\frac{B_4}{4!}}h^3\left[P'''(b)-P'''(a)\right]+\dots+h^{k-1}\frac{B_k}{k!}\cdot\left[P^{(k-1)}(b)-P^{(k-1)}(a)\right]+\dots$$

формула Эйлера-Маклорена

Формула Эйлера-Маклорена оценивает ошибку в вычислении интеграла $\int_a^b$ от a до b через римановы суммы с шагом h через значения производных в концах отрезка.

—

Если P-многочлен, то ряд на самом деле обрывается на члене $k=\deg P+1$ и дает точное равенство

Теорема для $\forall$ функции f (вместо многочлена P) если все четные производные на $[a;b]$ одного знака, то погрешность (левая часть) $-$ (k членов правой) R_k меньше по модулю $(k+1)$ члена. Не утверждается, что ряд сходится.

Пример: хотим найти $\sum_{i=100}^{999} \frac{1}{i}$ подставляем в Э-М

$a=100$, $b=1000$, $h=1$, $k=6$

$R_k <$ 8-го члена

$$f(x)=\frac{1}{x},\ f'(x)=-\frac{1}{x^2},\ f''(x)=\frac{2}{x^3},\ f'''=-\frac{6}{x^4},$$

$$f^{(k)}=\frac{k!}{x^{k+1}}(-1)^k$$

R_6 меньше 8 члена: $\frac{-\frac{1}{30}}{8!}h^7\left[\frac{7!}{100^8}-\frac{7!}{1000^8}\right]=$

$\leq \frac{-1}{240}\cdot\frac{1}{10^{16}}$

$$\sum_{100}^{999}\frac{1}{i}=\left[\int_{100}^{1000}\frac{dx}{x}=\log(10)\right](\approx 2,302585092994045)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{100}-\frac{1}{1000}\right)+\frac{1}{12}\left(\frac{1}{100^2}-\frac{1}{1000^2}\right)-\frac{1}{30\cdot4}\left(\frac{1}{100^4}-\frac{1}{1000^4}\right)+$$

0,0045 $\quad$ $\overset{\shortparallel}{0,0\ldots0825}$

$$+\frac{1}{42\cdot6}\left(\frac{1}{100^6}-\frac{1}{1000^6}\right)=$$

= Получится 2,3070933429102...