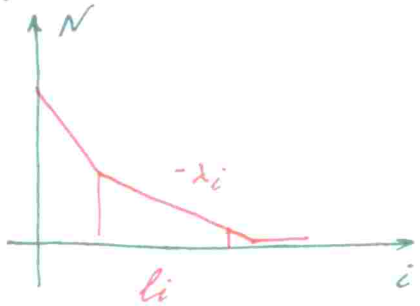
09.09. **Лекция №3. Решение уравнений в рядах Пюизо.**

Предложение

2) $\Phi(x,t) = \prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{x}{\alpha_i}\right)$, т.е. $f_0(t)=1$ - ст. коэффициент и все α_i есть. Тогда они делятся на группы, отвечающие рёбрам многоугольника Ньютона $N(\Phi)$, и число корней в группе равно l_i (длина проекции ребра на ось i), а порядок каждого корня $\text{ord}\,\alpha = -\lambda_i$ (- наклон ребра).

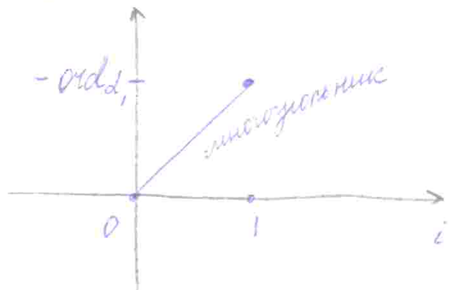


Д-во по индукции: 1° $\Phi(x,t) = 1-\frac{x}{\alpha_1}$

точки $(i, \text{ord}\, f_i)$

$f_0 = 1 \Rightarrow \text{ord}\, f_0 = 0$

$f_1 = -\frac{1}{\alpha_1}$ $\quad \text{ord}\, f_1 = -\text{ord}\,\alpha_1$



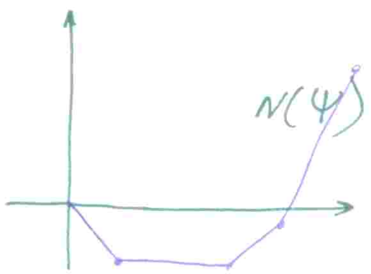
$l_1 = 1$

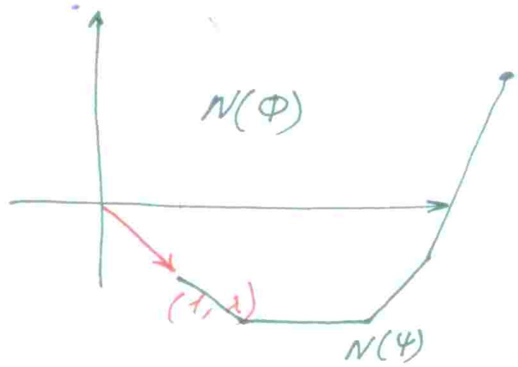
$\lambda_1 = -\text{ord}\,\alpha_1 \Rightarrow$ база индукции проверена

2° Шаг индукции: Упорядочим корни по возрастанию порядка: $\text{ord}\,\alpha_1 \le \text{ord}\,\alpha_2 \le \dots \le \text{ord}\,\alpha_n$

Пусть для $\Psi(x) = \prod_{i=1}^{n-1}\left(1-\frac{x}{\alpha_i}\right)$ доказано

Лемма: пусть $\Phi(x) = \left(1-\frac{x}{\alpha_n}\right)\Psi(x)$. Пусть первый наклон $N(\Psi) = \lambda_1$, $\text{ord}\,\frac{1}{\alpha_n} = \lambda \le \lambda_1$. Тогда $N(\Phi)$ получается из $N(\Psi)$ сдвигом на вектор $(1,\lambda)$ и присоединением этого вектора





Док-во леммы: Заменим переменные, чтобы $\lambda_n = 1$

$y = \frac{x}{\lambda_n}$, $\quad \Psi(x) \rightsquigarrow \Psi'(y) \qquad \Phi'(y) = (1-y)\Psi'(y)$

$\Phi(x) \rightsquigarrow \Phi'(y) \qquad N' = N - \lambda i$

$i, \operatorname{ord} f_i \quad ; \quad f_i' = \sum f_i x^i = \sum f_i (\lambda_n)^i y^i$

$\operatorname{ord} f_i \rightsquigarrow \operatorname{ord} f_i - \lambda i$

$\Downarrow$

$\Phi(y) = (1-y)\Psi(y) \qquad \lambda_1 \geq 0$

$\Phi(y) = \sum f_i y^i, \quad \Psi(y) = \sum g_i y^i$

$f_{i+1} = g_{i+1} - g_i$

$\operatorname{ord} f_{i+1} \geq \min(\operatorname{ord} g_{i+1}, g_i)$ - неархимедовость - точнее, здесь $=$, если $\operatorname{ord} g_i \neq \operatorname{ord} g_{i+1}$

Нужно доказать, что $N(\Phi)$ есть сдвиг на единицу вправо.

Знаем, что если $(i, \operatorname{ord} g_i)$ - вершина $N(\Psi')$, то $\operatorname{ord} g_{i+1} > \operatorname{ord} g_i \Rightarrow$ $(i+1, \operatorname{ord} f_i)$ - вершина (Φ')

Теорема: уравнение $\Phi(x,t)$ имеет n корней (с кратностями) в поле рядов Пюизо $\mathbb{C}\{\{t\}\}$ $\quad \left(\Phi(x,t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t) x^i\right)$

$\mathbb{C}(t)$ - поле рациональных функций $\underset{\text{разложение дроби в ряд}}{\subset}$ $\mathbb{C}((t)) \subset \mathbb{C}\{\{t\}\}$

, многочлен с коэфф. в $k[[t]]$ рядах Тейлора

Лемма Гензеля Пусть $\Phi(x,t)$ при $t=0$ $(\Phi_0(x))$

раскладывается на 2 множителя $\Phi_0(x) = a_0(x)\cdot b_0(x)$

взаимно просты. Тогда $\Phi(x,t) = a(x,t)\cdot b(x,t)$, т.что

$a\big|_{t=0} = a_0$, $b\big|_{t=0} = b_0$. Здесь поле коэффициентов не $\mathbb{C}$, а любое,

например $\mathbb{F}_p$ конечное.

Д-во: $a(x,t) = a_0(x) + a_1(x)t + \ldots$

$b(x,t) = b_0(x) + b_1(x)t + \ldots$

Будем рекур. (по очереди) искать a_i, b_i:

$\deg a_i < \deg a_0$

$\deg b_i < \deg b_0$

$\Phi(x,t) = \Phi_0(x) + \Phi_1(x)t + \ldots$

$a_0 b_0 = \Phi_0$

$a_1 b_0 + a_0 b_1 = \Phi_1$ – в многочленах от x. – по модулю a_0

$a_1 = \frac{\Phi_1}{b_0}$

Т.к. b_0 взаимно прост с a_0, $\exists!\, a_1$ степени $< \deg(a_0)$,

такой что $a_1 b_0 \equiv \Phi_1 \pmod{a_0}$

b_1 – единственный многочлен $\deg b_1 - \deg b_0$, такой что

$a_0 b_1 \equiv \Phi_1 \pmod{b_0}$

$a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2 = \Phi_2 \Rightarrow a_2 = \frac{\Phi_2 - a_1 b_1}{b_0} \pmod{a_0}$.

Док-во теоремы:

$\Phi(x,t) = \sum f_i(t) x^i$, $f_i \in \mathbb{C}((t))$ Лоран.

сначала умножим все коэффициенты на t^{1000},

чтобы $\operatorname{ord} f_i \geq 0$. Теперь заменим переменную, чтобы

старший коэфф. $f_n' = 1$

$(f_n x^n + \ldots) f_n^{n-1} = f_n^n x^n + \ldots$

$y = f_n x$ $\qquad$ $\overset{\shortparallel}{y^n} + \ldots$

все остальные коэффициенты всё равно в $\mathbb{C}[[t]]$

Теперь избавимся от f_{n-1} $\quad z = y - \frac{f'_{n-1}}{n}$

$\Phi'(y) = \Phi''(z) = z^n + \dots z^{n-2} \quad = \Phi'''(w) = w^n + 0 \cdot w^{n-1} +$

$\parallel$ $\quad$ какая-то степень w^{ℓ}, коэфф: который при $s = 0$ $\neq 0 \Rightarrow$

$y^n + f'_{n-1} y^{n-1} + \dots$ $\quad \Rightarrow \Phi'''(w)$ при $s = 0$ $\neq (w-?)^n$

Теперь есть многочлен $\Phi(z, t)$ с коэфф. в рядах Тейлора $f_n = 1$, $f_{n-1} = 0$.

Хотим найти корень по лемме Гензеля

$$\Phi(z, 0) = \Phi_0(z)$$

Индукцией по n всё получится, если только $\Phi_0(z)$ не был чистой степенью $(z-?)^n$

Если же $\Phi_0(z) = \Phi(z, t)$ при $t = 0$ равен z^n, то сейчас сделаем замену переменной (включающую $t = s^d$) чтобы $\Phi_0(z)$ стал был уже не чистой n-степенью.

$$\Phi(z, t) = z^n + f_{n-2} z^{n-2} + \dots$$

Пусть $\mathcal{D}_m$ = порядок f_{n-m} и из всех (корней) дробей $\frac{\mathcal{D}_m}{m}$, $n \geq m \geq 2$

выберем наименьшую $\frac{\mathcal{D}_m}{m} = \frac{p}{q}$ - несокр дробей

Сделаем замену $t = s^q$, а $z = s^p w$

$$\Phi(z, t) = z^n + \sum_{m=2}^{n} (a_{\mathcal{D}_m} t^{\mathcal{D}_m} + \dots) z^{n-m} = s^{pn} + \sum_{m=2}^{n} s^{p(n-m) + q\mathcal{D}_m} (\alpha_{\mathcal{D}_m} + \dots) =$$

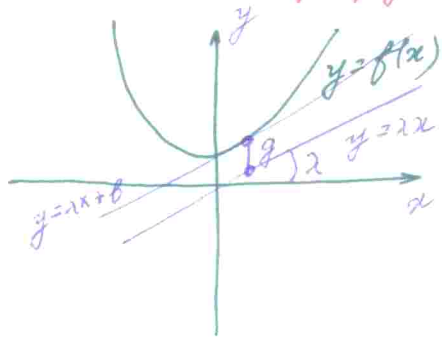
$$= s^{pn} \left(w^n + \sum_{m=2}^{n} s^{q\mathcal{D}_m - pm} (\alpha_{\mathcal{D}_m} + \dots) w^{n-m} \right)$$

Заметим, что $q\mathcal{D}_m - pm \geq 0$ $\quad \forall m$

но для какого-то $q\mathcal{D}_m - pm = 0$.

Т.е. к Φ''' можно применить лемму Гензеля

Преобразование Лежандра



g - расстояние

$$g(\lambda) = \lambda x - f(x)\Big|_{x(\lambda)}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\lambda x - f(x)\right) = 0$$

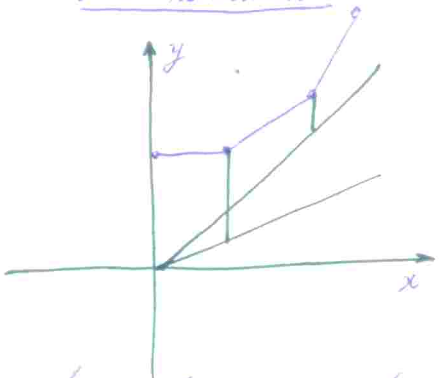
$$\lambda = f'(x)$$

$$x(\lambda) = f'^{-1}(\lambda)$$

$g(\lambda) = (Lf)(\lambda)$ - преобраз. Лежандра

$$L^2 f(x) = f(x)$$

Для ломаной



$$(LN)(\lambda) = -y(-\lambda)$$