Алгебра 2 курс

Лекция №1 Формальные ряды с коэффициентами из $\mathbb{C}$ 1.09.

1) $a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots$, $a_0, a_1, \dots \in \mathbb{C}$ ← Ряды Тейлора формальные

$a_{-10} t^{-10} + a_{-9} t^{-9} + \dots$ ← Ряды Лорана

2) $\sum a_i t^i + \sum b_i t^i = \sum (a_i + b_i) t^i$ ряды можно складывать и перемножать

$$\sum_{i > -N} a_i t^i = t^{-N} \cdot \sum_{i \geq 0} a_{i-N} t^i$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \cdot \sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i = \sum_{i=0}^{\infty} \Big(\sum_{j+k=i} a_j b_k \Big) t^i$$

Ряды Лорана (в отличие от рядов Тейлора) можно делить ⇒ они образуют поле

Ряды Тейлора можно (иногда) композировать, т.е. подставлять друг в друга

$\sum_{i=0}^{\infty} a_i Y^i$, $\sum b_i t^i = Y$ (но $b_0 = 0$) ← не будет бесконечных сумм

имеет смысл, если Y без нулевого члена

$\boxed{\text{ord}}$ – порядок – номер первого ненулевого коэффициента

$$\text{ord}(t^6 + t^7 - t^{10}) = 6$$

$$\text{ord}(t^{-3} + t + t^{10}) = -3$$

3) Деление

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - \dots$$

$$\frac{1}{1+Y} = 1 - Y + Y^2 - Y^3 + \dots$$

$\Downarrow$

Умеем обращать любой ряд Тейлора у которого $a_0 = 1$ или более общо: a

Если же порядок нашего ряда $f = N$, то $f = t^N \cdot g$, где g – ряд Тейлора и $a_0 \neq 0$

$$\frac{1}{f} = t^{-N} \cdot g^{-1}$$

4) Можно дифференцировать

$$\left[\sum_{i\geq -N}^{\infty} a_i t^i\right]' = \sum_{i\geq -N+1}^{\infty} i\, a_i t^{i-1}$$

Ряды Тейлора можно интегрировать, причем без константы

2) $$\int \sum_{i\geq 0} a_i t^i = \sum_{i\geq 0}^{\infty} \frac{a_i}{i+1} t^{i+1}$$

Дифференциальные уравнения

$$f' = f \qquad f = \exp(t)\, a = \sum \frac{t^i}{i!}\, a$$

$$f' = \frac{1}{1+t} \qquad f = \log(1+t)$$

$$\sum_{i\geq 1}^{\infty} \frac{t^i}{i}(-1)^{i+1} = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} -$$

Логарифмическая производная

$(\log f)'$ здесь f - производный ряд Тейлора $a_0 = 1$

$(\log f)' = \frac{f'}{f}$ - определение производной сложной функции

$$\left[\ \log'(t^3+t^2+1) = \frac{3t^2+2t}{1+t^2+t^3}\right.$$

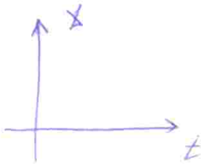
5) Алгебраические уравнения

$\Phi(t,x)$ - многочлен от x с коэффициентами из $\mathbb{C}((t))$ ряды Лора

$[\mathbb{C}(t)]$ - ряды Тейлора

$$\Phi = t^{13} + t - t^6 x + t^4 x^2 + t^2 x^3 + \ldots$$

$$\Phi(t,x) = 0$$



Теорема: у любого многочлена $\Phi(t,x)$ есть корень $x = x(t)$ в $\mathbb{C}\{$

т.е. поле $\mathbb{C}\{\{t\}\}$ алгебраически замкнуто.

$tx = 0 \Rightarrow x = 0$

$t^2 + x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm i t$

$t^3 + 13x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm i\sqrt{\frac{t^3}{13}} \quad (x = t^{3/2} a)$

$\mathbb{C}\{\{t\}\}$ - поле рядов Пюизо: ряды Лорана от $t^{1/d}$ для какого-то $d \in$

$\cancel{t^{1/2} + t^{2/3} + t^{3/4} + \ldots}$ - нельзя - не является $\sqrt{t}$ фиксированной степени

$d = 2 \qquad t^{1/2} + t + t^{3/2} + \ldots$

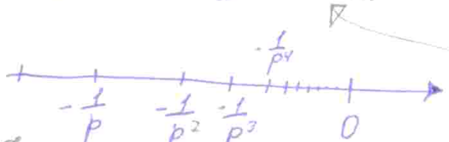
$d = 3 \qquad t^{1/3} - t^{4/3} + \ldots$

} чтобы их сложить, нужно $d = 6$

Грозное предупреждение ↯ - если заменить поле $\mathbb{C}$ на другое поле, в котором все уравнения решаются, но конечной характеристики $\mathbb{F}_p$ $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ - там эта теорема будет неверна

$x^p - x - t^{-1} = 0$

$x = t^{-\frac{1}{p}} + t^{-\frac{1}{p^2}} + t^{-\frac{1}{p^3}} + \ldots$ - ряд не Пюизо (знаменатели растут)



$(a+b)^p = a^p + b^p$ ✓ в поле

Попробуем подобрать x

1) Возьмем сначала $x_0 = t^{-\frac{1}{p}} \Rightarrow t^{-1} - \underbrace{t^{-\frac{1}{p}}}_{\text{мешает}} - t^{-1} = 0$ 2) Тогда возьмем $x_1 = t^{-\frac{1}{p}} + t^{-\frac{1}{p^2}} =$

$\Rightarrow t^{-1} + t^{-\frac{1}{p}} - t^{-\frac{1}{p}} + t^{-\frac{1}{p^2}} - t^{-1} = 0$

$\Downarrow$

и так далее

б) Метод Ньютона (1671)

$x = x(t) \qquad \Phi(x, t) = 0$

Пример: а) $\Phi = t^7 + t^6 - t^3 x + t x^2 - x^3 = 0$

$$x = \sum_{\lambda \in \mathbb{Q}} a_\lambda t^\lambda$$

б) Первое комбинаторное соображение даст нам ord x (λ)

Чтобы найти порядок решений нужно построить ломаную Ньютона

$$y_i(\lambda) = i\lambda + \operatorname{ord} f_i$$

$$\Phi(x, t) = \sum_{i=0}^{N} f_i(t) x^i$$

Линейные функции на плоскости с координатами (λ, y)

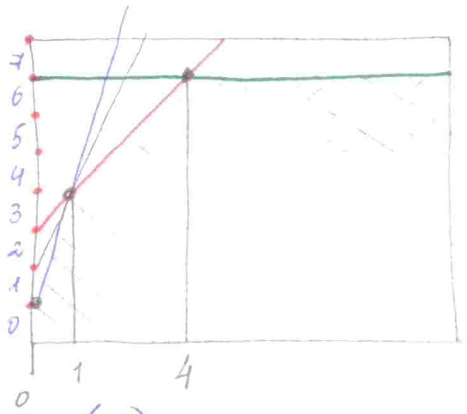
$T = (t^7 + t^6)x^0 - t^3 x + t x^2 - x^3$

$f_0 = t^7 + t^6, \quad \gamma_0 = 6 \qquad (0\cdot\lambda + 6 = 6)$

$f_1 = -t^3, \quad \gamma_1 = \lambda + 3 \qquad (1\cdot\lambda + 3 = \lambda + 3)$

$f_2 = t, \quad \gamma_2 = 2\lambda + 1 \qquad (2\cdot\lambda + 1 = 2\lambda + 1)$

2) $f_3 = -1, \quad \gamma_3 = 3\lambda \qquad (3\lambda + 0 = 3\lambda)$



$\operatorname{ord} x_1(t) = 0$

$\operatorname{ord} x_2(t) = 1$

$\operatorname{ord} x_3(t) = 4$

$\Gamma(\lambda) := \min \gamma_i(\lambda)$

Возможные корни начинаются со степени λ, которые есть абсциссы вершин

У него: $\operatorname{ord} x_1(t) = 1 \qquad x_1(t) = a_1 t + \dots$

$\operatorname{ord} x_2(t) = 2 \qquad x_2(t) = a_2 t^2 + \dots$

$\operatorname{ord} x_3(t) = 3 \qquad x_3(t) = a_3 t^3 + \dots$

$t^7 + t^6 - t^3(a_1 t + \dots) + t(a_1^2 t^2 + \dots) - (a_1^3 t^3 - \dots) = 0$

$a_1^2 - a_1^3 = 0$ (при наименьших)

$a_1 = 1, \quad a_1 = 0 \leftarrow$ не может быть

$\Downarrow$

$a_1 = 1$

$t^7 + t^6 - t^3(a_2 t^2 + \dots) + t(a_2^2 t^4 + \dots) - \dots = 0$

$a_2^2 - a_2 = 0$

$a_2 = 1, \quad a_2 = 0 \leftarrow$ не может быть

$t^7 + t^6 - t^3(a_3 t^3 + \dots) + t(a_3^3 t^6 + \dots)$

$1 - a_3 = 0, \quad a_3 = 1$

Второй коэффициент

$$\Phi = t^7 + t^6 - t^3 x + t x^2 - x^3 = 0$$

$$x = a_1 t + x^{(1)}$$

$$\Phi = \Phi^{(1)}(x^{(1)})$$

Лекция №2 Продолжение. метод Ньютона 2.09.

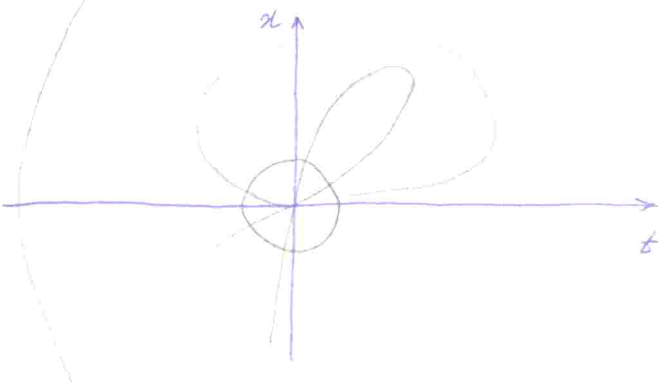
$$\Phi(x,t) = (t^7 + t^6) - t^3 x + t x^2 - x^3 = 0$$

$$x(t) = x_{1,2,3}(t)$$

$$x_1 = t + \ldots$$

$$x_2 = t^2 + \ldots$$

$$t_3 = t^3 + \ldots$$



$$x = t^2 + x^{(1)}$$

$$\Phi^{(1)}(x^{(1)}) = \Phi(x) = t^7 + t^6 - t^3(t^2 + x^{(1)}) + t(t^2 + x^{(1)})^2 - (t^2 + x^{(1)})^3 =$$

$$= t^7 + \cancel{t^6} - \cancel{t^5} + \cancel{t^5} - \cancel{t^6} + [t^3 + 2t^3 - 3t^4]x^{(1)} + [t - 3t^2]x^{(1)2} - x^{(1)3} =$$

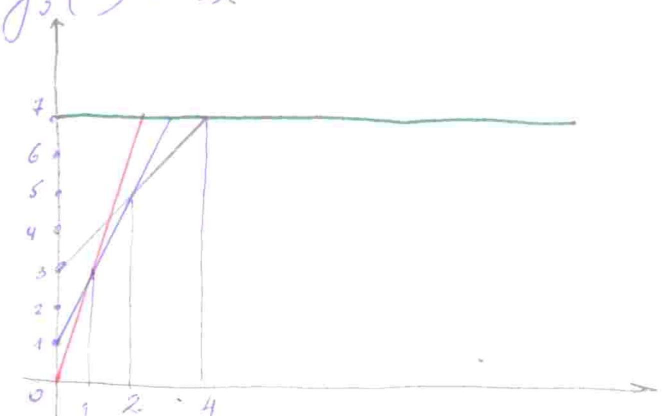
$$= t^7 + [t^3 - 3t^4]x^1 + [t - 3t^2]x^{1\,2} - x^{1\,3}$$

$$j_0(\lambda) = 7$$

$$j_1(\lambda) = \lambda + 3$$

$$j_2(\lambda) = 2\lambda + 1$$

$$j_3(\lambda) = 3\lambda$$



[Всё делаем для x_2] $\Rightarrow$

$\Rightarrow x_2 = t^2 + a_4 t^4 + \dots$

Подставляем $x^{(1)} = a_4 t^4 + \dots$

в $\Phi^{(1)}$ $\mathrm{ord} = 7$ и при t^7 получаем $1 + a_4 = 0 \Rightarrow a_4 = -1$

2) **Предложение:** если $x_i(t)$ - решения $\Phi(x,t) = 0$, то они естественно нумеруются вершинами ломаной Ньютона Γ, $\mathrm{ord}\, x_i = \lambda_i$ (абсцисса вершин); а кратности = наклон левого ребра − наклон правого

Замечание: $\Phi(x,t)$ мог бы быть рядом (бесконечным по x) — и всё равно определена ломаная Ньютона

Эквивалентная комбинаторная кодировка — многоугольник Ньютона

$$N(t) = \mathrm{ord}\, f_i(t)$$

$$\Phi(x,t) = \sum_{i=0} f_i(t) x^i$$

Многоугольник Ньютона - это их выпуклая вниз оболочка

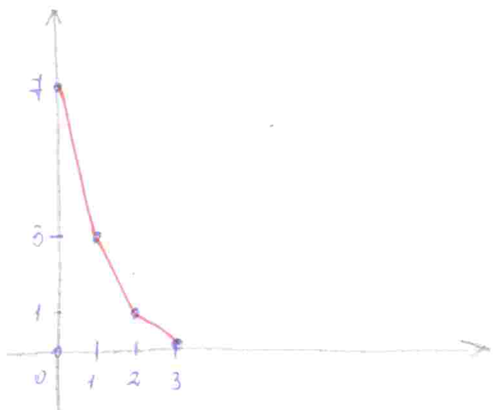
В том же примере

$f_0(\lambda) = 7$ $\quad$ $N(0) = 7$

$f_1(\lambda) = \lambda + 3$ $\quad$ $N(1) = 3$

$f_2(\lambda) = 2\lambda + 1$ $\quad$ $N(2) = 1$

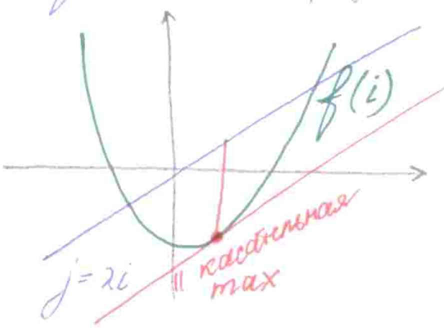
$f_3(\lambda) = 3\lambda$ $\quad$ $N(3) = 0$



Связь между ломаной Ньютона и многоугольника Ньютона - - преобразование Лежандра

Пусть $f(i)$ - выпуклая вниз функция от i

$Lf(\lambda)$ - её преобразование Лежандра (тоже выпуклая)



$\lambda i - f(i)$ - выпуклая функция $\Rightarrow$ имеет максимум $Lf(\lambda)$

Упр: $\gamma(\lambda) = -LN(-\lambda)$

↓

график Γ

Есть биекция между рёбрами N и вершинами Γ, т.к. наклон ребра $\longleftrightarrow$ абсцисса вершины