# Алгебра. Листок 8.

◇ **8.1.** *В этой задаче линейное пространство $V$ не обязательно предполагается конечномерным.*
*1) Пусть $f$ — идемпотентный оператор на $V$. Докажите, что $V = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.*
*2) Пусть $V = U \oplus W$. Докажите, что существует единственный идемпотентный оператор $f : V \to V$, такой что $U = \operatorname{Im} f$, $W = \operatorname{Ker} f$.*

◇ **8.2.** *Докажите, что каждое из указанных отображений $f : V \to V$ в себя является идемпотентным линейным оператором и укажите, какое разложение в прямую сумму ему соответствует.*
*1) $V = \mathrm{gl}(n, \mathbb{K})$ (пространство квадратных $n \times n$ матриц с элементами из поля $\mathbb{K}$), $f(A) = \frac{1}{2}(A + A^T)$;*
*2) $V = \mathbb{K}[t]$ (докажите, что это пространство бесконечномерно!), $f(P(x)) = \frac{1}{2}\left(P(t) + P(-t)\right)$;*
*3) $V = \mathbb{R}[t]$, $f(P(x)) = P(0) + \frac{P'(0)}{1!}t + \frac{P''(0)}{2!}t^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!}t^n$. (Число $n$ фиксировано, $P^{(n)}(x)$ обозначает $n$-ую производную многочлена $P(x)$. Многочлен $f(P(x))$ называется $n$-ым многочленом Тейлора для многочлена $P(x)$).*

◇ **8.3.** *Пусть $A \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{K})$ — фиксированная диагональная матрица, причем все ее собственные значения различны. Найдите все собственные значения и собственные векторы оператора $f : \mathrm{gl}(n, \mathbb{K}) \to \mathrm{gl}(n, \mathbb{K})$ для следующих случаев:*
*а) $f(X) = AX$;* *б) $f(X) = AX - XA$;* *в) $f(X) = A^{-1}XA$ (если $\det A \neq 0$).*

◇ **8.4.** *Найдите все собственные значения и размерности собственных подпространств для операторов из предыдущей задачи в случае, когда $A$ — произвольная матрица, имеющая $n$ различных собственных значений.*

◇ **8.5.** *Пусть $\lambda$ — собственное значение линейного оператора $f$, $Q(t)$ — некоторый многочлен. Докажите, что $Q(\lambda)$ является собственным значением оператора $Q(f)$.*

◇ **8.6.** *1) Число 4 является собственным значением линейного оператора $f^2$ над $\mathbb{R}$. Верно ли, что у оператора $f$ одно из чисел 2 или $-2$ является собственным значением?*
*2) Пусть $f$ — линейный оператор над $\mathbb{R}$. Может ли оператор $f^2$ иметь отрицательные собственные значения?*

◇ **8.7.** *Приведите пример линейного оператора в $\mathbb{R}^4$, имеющего единственное инвариантное подпространство, причем размерность этого подпространства равна 2.*

◇ **8.8.** *Рассмотрим оператор дифференцирования на (бесконечномерном) линейном пространстве всех определенных на $\mathbb{R}$ функций, которые можно продифференцировать любое число раз. Найдите в этом пространстве конечномерное инвариантное подпространство, при ограничении на которое оператор дифференцирования*
*а) будет иметь заданные собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$;*
*б) не будет иметь вещественных собственных значений.*

◇ **8.9.** *а) Докажите, что множество $S$ всех последовательностей комплексных чисел (т.е. $S = \{(z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots), \quad z_i \in \mathbb{C}\}$) является линейным пространством над $\mathbb{C}$. Докажите, что это линейное пространство не является конечномерным.*
*б) Придумайте пример линейного оператора на $S$, не имеющего ни одного собственного вектора.*
*в) Придумайте пример обратимого линейного оператора на $S$, не имеющего ни одного собственного вектора.*

◇ **8.10.** *Найдите собственные значения и собственные векторы линейного оператора в $\mathbb{C}^n$, матрица которого имеет вид $a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{если } j - i \equiv 1 \pmod n \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$ (см. задачу 5.7е)*
*а) для $n = 3$;* *б) для произвольного $n$.*

◇ **8.11.** *Решите предыдущую задачу для* $n = 3$ *а) над полем* $\mathbb{F}_2$*; б)над полем* $\mathbb{F}_7$*.*

◇ **8.12.** *Пусть* $U$ *— подпространство конечномерного линейного пространства* $V$*,* $v_1, v_2, \dots v_k \in V$*. Рассмотрим смежные классы* $\bar{v}_i = v_i + U \in V/U$*.*
*а) Верно ли, что если векторы* $v_1, v_2, \dots v_k$ *линейно независимы, то смежные классы* $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots \bar{v}_k$ *тоже линейно независимы?*
*б) Верно ли, что если смежные классы* $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots \bar{v}_k$ *линейно независимы, то векторы* $v_1, v_2, \dots v_k$ *тоже линейно независимы?*
*в) Докажите, что* $\dim U + \dim V/U = \dim V$*.*

◇ **8.13.** *Пусть* $f$ *— линейный оператор на конечномерном пространстве* $V$*, а* $U$ *— инвариантное подпространство. Рассмотрим отображение* $\bar{f} : V/U \to V/U$*, заданное формулой* $\bar{f}(v + U) = f(v) + U$*. Поставьте между следующими парами утверждений один из знаков "*$\Leftrightarrow$*", "*$\Rightarrow$*" "*$\Leftarrow$*" (и докажите, что получились полученные теоремы).*
*а) "оператор* $f$ *ненулевой" и "оператор* $\bar{f}$ *ненулевой";*
*б) "оператор* $f$ *обратим" и "оператор* $\bar{f}$ *обратим";*
*в)"оператор* $f$ *нильпотентен" и "оператор* $\bar{f}$ *нильпотентен";*
*г)* $\operatorname{Ker} f \subset U$ *и "оператор* $\bar{f}$ *обратим".*

◇ **8.14.** *Пусть* $f$ *— линейный оператор на конечномерном пространстве* $V$*.*
*а) Докажите, что если характеристический многочлен оператора* $f$ *неприводим, то* $f$ *не имеет инвариантных подпространств, кроме* $\{0\}$ *и* $V$*.*
*б)* Докажите, что если* $f$ *не имеет инвариантных подпространств, кроме* $\{0\}$ *и* $V$*, то характеристический многочлен оператора* $f$ *неприводим.*
*в)* Останется ли верным утверждение "а", если в его формулировке характеристический многочлен заменить на минимальный?*
*г)* Останется ли верным утверждение "б", если в его формулировке характеристический многочлен заменить на минимальный?*

◇ **8.15.** *Линейный оператор в конечномерном пространстве над* $\mathbb{C}$ *имеет единственный (с точностью до пропорциональности) собственный вектор. Докажите, что в подходящем базисе матрица этого оператора — жорданова клетка.*

◇ **8.16.** *1) Докажите, что характеристический многочлен нильпотентного оператора есть* $t^n$*, где* $n$ *— размерность пространства.*
*2) Докажите, что характеристический многочлен нильпотентного оператора совпадает с его минимальным многочленом тогда и только тогда, когда его матрицей в подходящем базисе является жорданова клетка.*

◇ **8.17.** *Каким может быть минимальный многочлен и жорданово разложение такого нильпотентного линейного оператора* $f$ *в* $\mathbb{R}^8$*, что*
*а)* $\dim \operatorname{Ker} f = 2$*,* $\dim \operatorname{Ker} f^2 = 4$*? б)* $\dim \operatorname{Ker} f = 2$*,* $\dim \operatorname{Ker} f^3 = 5$*? в)* $\dim \operatorname{Ker} f = 5$*?*
*Для каждого случая приведите пример такого оператора.*

◇ **8.18.** *Рассмотрим конечную строго возрастающую последовательность натуральных чисел* $0 < d_1 < d_2 < \ldots < d_k < n$*. Найти условие, необходимое и достаточное для того, чтобы существовал нильпотентный оператор* $f$ *на* $n$*-мерном линейном простраcтве, такой что* $d_m = \dim \operatorname{Ker} f^m$*.*

◇ **8.19.** *а) Пусть линейные операторы* $f$ *и* $g$ *над* $\mathbb{C}$ *коммутируют (т.е.* $f \circ g = g \circ f$*). Докажите, что у* $f$ *и* $g$ *имеется общий собственный вектор.*
*б)**Докажите, что если два линейные оператора* $f$ *и* $g$ *над* $\mathbb{C}$ *таковы, что* $\operatorname{rank}(f \circ g - g \circ f) \leq 1$*, то у* $f$ *и* $g$ *имеется общий собственный вектор.*