Алгебра. Листок 3.

◇ **3.1.** *Докажите, что если p — простое число, то кольцо $\mathbb{Z}_{p^n}$ нельзя представить в виде прямого произведения каких-нибудь колец.*

◇ **3.2.** *Докажите, что если $(m,n)=1$, то $\mathbb{Z}_{mn} \cong \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$.*

◇ **3.3.** *Сколько попарно неизоморфных колец здесь выписано:*
$\mathbb{Z}_{24}$, $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$?

◇ **3.4.** *1) Докажите, что любое кольцо вида $\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{n_k}$ изоморфно некоторому кольцу вида $\mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{m_l}$, где числа $m_1, m_2, \ldots, m_l$ таковы, что каждое следующее является делителем предыдущего, т.е. $m_{i+1} \mid m_i$, $i = 1, 2, \ldots, l-1$, и что такое представление для данного кольца единственно.*

◇ **3.5.** *1) Докажите, что множество S всех последовательностей $\{a_n\}$ действительных чисел, имеющих предел, образует кольцо относительно операций сложения и умножения. Опишите идемпотентные последовательности. Докажите, что $S \cong \mathbb{R}^m \times S$ для любого m.*

◇ **3.6.** *Докажите, что элемент $(a;b) \in A \times B$ обратим тогда и только тогда, когда обратимы оба элемента $a \in A$ и $b \in B$. Выведите из этого мультипликативность функции Эйлера.*

◇ **3.7.** *Докажите, что элемент $(a;b) \in A \times B$ является корнем уравнения $x^2 = 1$ тогда и только тогда, когда оба элемента $a \in A$ и $b \in B$ удовлетворяют этому уравнению. Выведите из этого решение задачи 1.20.*

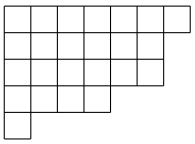
◇ **3.8.** *Докажите, что если $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ и $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing$ то кольцо $\mathcal{B}(\Omega)$ (с операциями симметрической разности в качестве сложения и пересечения в качестве умножения) изоморфно прямому произведению колец $\mathcal{B}(\Omega_1) \times \mathcal{B}(\Omega_2)$. Выведите из этого для случая конечного множества Ω изоморфизм $\mathcal{B}(\Omega) \cong \underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \ldots \times \mathbb{Z}_2}_{|\Omega|}$.*

◇ **3.9.** *Кольцо называется* **булевым**, *если все его элементы идемпотентны (кроме 0 и 1).*
1) Докажите, что любое конечное булево кольцо изоморфно $\mathcal{B}(\Omega)$ для некоторого конечного множества Ω.
**2) Приведите пример бесконечного булева кольца, не изоморфного $\mathcal{B}(\Omega)$ ни для какого множества Ω.*

◇ **3.10.** *Докажите следующие тождества:*
а) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$.
б) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$.
в) $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots + C_n^{2[\frac{n}{2}]} = 2^{n-1}$.
г) $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n = n2^{n-1}$.
д) $C_n^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+2}^2 + \ldots + C_{n+k}^k = C_{n+k+1}^k$.
е) $C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + \ldots + C_{n-[\frac{n}{2}]}^{[\frac{n}{2}]} = f_n$ — *n-ое число Фиббоначи.*
($[x]$ это целая часть числа x.)
ж) $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$.

◇ **3.11.** *а) Сколько решений в целых неотрицательных числах имеет уравнение $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n$? ($m$, n натуральные числа.)*
б) А сколько это уравнение имеет решений в натуральных числах?
в) Сколько существует одночленов степени n от m переменных?

Диаграммой Юнга называется фигурка, ограниченная северной и западной сторонами нарисованного по линиям клетчатой бумаги прямоугольника и какой-нибудь проведенной по линиям клетчатой бумаги кратчайшей ломаной, соединяющей юго-западную вершину этого прямоугольника с северо-восточной.



Это диаграмма Юнга, имеющая 5 строк и 7 столбцов.

◇ **3.12.** *а) Сколько существует различных диаграмм Юнга, имеющих из не более чем n строк и не более чем m столбцов?*
а) Сколько существует различных диаграмм Юнга, имеющих ровно n строк и ровно m столбцов?

◇ **3.13.** *1) Докажите формулу "тринома": $(a+b+c)^n = \sum\limits_{k+l+m=n} \frac{(k+l+m)!}{k!l!m!} a^k b^l c^m$. (Сколько слагаемых стоит в правой части?)*
2) Придумайте и докажите обобщение этой формулы на произвольное (конечное) число слагаемых.

◇ **3.14.** *Докажите, что многочлен $x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1$ делится нацело на многочлен $x^k + x^{k-1} + x^{k-2} + \ldots + x + 1$ тогда и только тогда, когда $n+1$ делится нацело на $k+1$.*

◇ **3.15.** *Найдите остаток от деления многочлена $x^{11111} + x^{321} + 1$*
а) на $x^2 - 1$; б) на $x^2 + 1$; в) на $x^2 - x + 1$.

В задачах 3.16 - 3.22 нужно вычислить ответ в кольце формальных степенных рядов, т.е. получить ответ в виде $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$ и объяснить, как найти a_n.

◇ **3.16.** *а)* $\frac{1}{10x+1}$; *б)* $\frac{1}{2+x}$; *в)* $\frac{1}{2x^2-3x+1}$.

◇ **3.17.** $\frac{1}{1-x-x^2}$. *Как называется последовательность коэффициентов этого ряда?*

◇ **3.18.** $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 \ldots)(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 \ldots)$.

◇ **3.19.** *а)* $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 \ldots)^2$; *б)* $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 \ldots)^n$.

◇ **3.20.** *а)* $(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \ldots)^2$; *б)* $(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \ldots)^n$;

в) $$\frac{1}{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \ldots}.$$

◇ **3.21.** $2(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots)(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots)$.

◇ **3.22.** * $\left[1 - 2x - \left(\frac{1}{2!}2^2x^2 + \frac{1\cdot3}{3!}2^3x^3 + \frac{1\cdot3\cdot5}{4!}2^4x^4 + \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{5!}2^5x^5 + \ldots\right)\right]^2$. *(Замена $y = 2x$ не возбраняется.)*

◇ **3.23.** * *Докажите, что ряд $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{3!} \ldots$ нельзя представить в виде отношения двух многочленов.*

◇ **3.24.** *Придумайте ряд, коэффициентами которого являются только нули и единицы, который нельзя представить в виде отношения двух многочленов.*

◇ **3.25.** * *Как связана задача 3.22 с задачей 2.4?*